МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О.М. БЕКЕТОВА

Завдання для самостійної роботи за темою «ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ» з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» з прикладами розв'язання типового варіанта

(для студентів 2 курсу денної форми навчання

за напрямом підготовки 6.080101 – «Геодезія, картографія та землеустрій»)

Харків – ХНУМГ – 2013

Завдання для самостійної роботи за темою «Елементи теорії ймовірності» з дисципліни «Вища математика» з прикладами розв’язання типового варіанта (для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.080101 – «Геодезія, картографія та землеустрій»). / Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. : С. М. Мордовцев, М. П. Данилевський,. – Х. : ХНУМГ, 2013. – 18 с.

Укладачі: С. М. Мордовцев,
М. П. Данилевський

Рецензент: доктор фізико-математичних наук, проф. А. І. Колосов

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
протокол №3 від 24.10.2012 р.

Завдання 1

Закон розподілу випадкової величини x заданий таблицею (перша строчка – можливі значення x, друга – відповідні їм значення ймовірностей p). Знайти: а) математичне очікування;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення випадкової величини x;

г) побудувати графік інтегральної функції розподілу F(X) .

1	x_i	2	4	6	8	10
	p_i	0,1	0,24	0,31	0,2	0,15
2	x_i	10	12	14	16	18
	p_i	0,04	0,15	0,24	0,3	0,27
3	x_i	8	12	16	20	24
	p_i	0,05	0,18	0,4	0,22	0,15
4	x_i	15	18	21	24	27
	p_i	0,1	0,2	0,35	0,2	0,15
5	x_i	5	6	7	8	9
	p_i	0,03	0,14	0,25	0,36	0,22
6	x_i	2	4	6	8	10
	p_i	0,1	0,24	0,31	0,2	0,15
7	x_i	10	12	14	16	18
	p_i	0,04	0,15	0,24	0,3	0,27
8	x_i	8	12	16	20	24
	p_i	0,1	0,2	0,35	0,2	0,15
9	x_i	15	18	21	24	27
	p_i	0,03	0,14	0,25	0,36	0,22
10	x_i	2	4	6	8	10
	p_i	0,12	0,24	0,4	0,14	0,1
11	x_i	10	12	14	16	18
	p_i	0,08	0,2	0,3	0,22	0,2
12	x_i	8	12	16	20	24
	p_i	0,1	0,24	0,31	0,2	0,15
13	x_i	5	6	7	8	9
	p_i	0,05	0,12	0,4	0,25	0,18

Продовження таблиці

14	x_i	11	13	15	17	19
	p_i	0,1	0,24	0,31	0,2	0,15
15	x_i	2	5	8	11	14
	p_i	0,02	0,14	0,4	0,26	0,18
16	x_i	3	5	7	9	11
	p_i	0,13	0,27	0,34	0,23	0,03
17	x_i	11	13	15	17	19
	p_i	0,07	0,18	0,27	0,33	0,15
18	x_i	9	13	17	21	25
	p_i	0,08	0,21	0,43	0,25	0,03
19	x_i	16	19	22	25	28
	p_i	0,08	0,18	0,33	0,18	0,23
20	x_i	6	7	8	9	10
	p_i	0,03	0,14	0,25	0,36	0,22
21	x_i	3	5	7	9	11
	p_i	0,08	0,22	0,37	0,18	0,15
22	x_i	11	13	15	17	19
	p_i	0,1	0,21	0,3	0,36	0,03
23	x_i	9	13	17	21	25
	p_i	0,16	0,2	0,35	0,26	0,03
24	x_i	16	19	22	25	28
	p_i	0,05	0,15	0,3	0,36	0,14
25	x_i	3	5	7	9	11
	p_i	0,1	0,24	0,42	0,14	0,1
26	x_i	11	13	15	17	19
	p_i	0,06	0,22	0,32	0,22	0,18
27	x_i	9	13	17	21	25
	p_i	0,07	0,21	0,35	0,17	0,2
28	x_i	6	7	8	9	10
	p_i	0,1	0,15	0,35	0,22	0,18
29	x_i	12	14	16	18	20
	p_i	0,12	0,24	0,4	0,18	0,06
30	x_i	3	6	9	12	15
	p_i	0,05	0,14	0,41	0,26	0,14

Приклад розв'язку завдання 1

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,15	0,35	0,25	0,15

З аналізу ряду розподілу обчислимо математичне сподівання:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0{,}1\cdot 1+0{,}15\cdot 2+0{,}35\cdot 3+0{,}25\cdot 4+0{,}15\cdot 5=3{,}2$$

дисперсію і середнє квадратичне відхилення:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 p_i=(1-3{,}2)^2\cdot 0{,}1+(2-3{,}2)^2\cdot 0{,}15+(3-3{,}2)^2\cdot 0{,}35+$$
$$+(4-3{,}2)^2\cdot 0{,}25+(5-3{,}2)^2\cdot 0{,}15=1{,}36$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=1{,}166$$

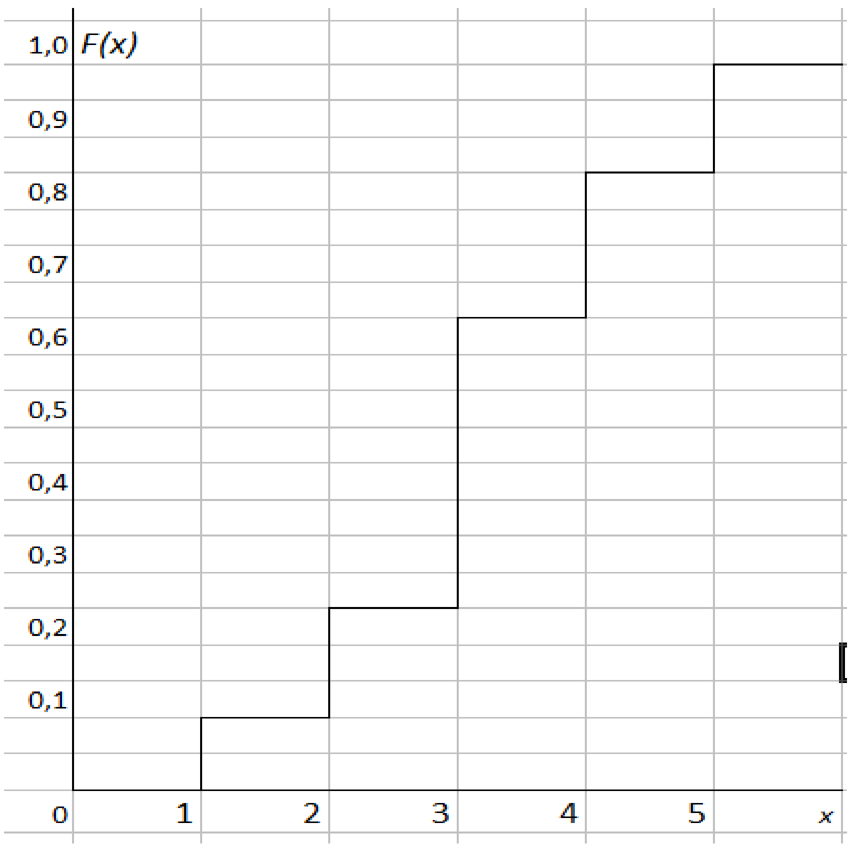

Рис. 1.1 – Графік інтегральної функції розподілу F(X)

Завдання 2

Випадкова величина *x* задана інтегральною функцією розподілу *F(x)*. Знайти:

а) диференціальну функцію (щільність ймовірностей) розподілу;

б) математичне очікування, дисперсію, середнє квадратичне відхилення;

в) побудувати графік інтегральної та диференціальної функції;

г) обчислити ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (α,β).

1	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<2\\ \dfrac{(x-2)^2}{9} \quad \text{при } 2\le x<5\\ 1, \text{ при } x>5\end{cases}$ $\alpha=4,\ \beta=5{,}5$	2	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<1\\ \dfrac{(x-1)^2}{4} \quad \text{при } 1\le x<3\\ 1, \text{ при } x>3\end{cases}$ $\alpha=1{,}5,\ \beta=2$
3	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<2\\ (x-2)^3 \quad \text{при } 2\le x<3\\ 1, \text{ при } x>3\end{cases}$ $\alpha=2,\ \beta=2{,}5$	4	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0\\ \dfrac{x^3}{27} \quad \text{при } 0\le x<3\\ 1, \text{ при } x>3\end{cases}$ $\alpha=1,\ \beta=2$
5	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<1\\ \dfrac{(x^2-x)}{2} \quad \text{при } 1\le x<2\\ 1, \text{ при } x>2\end{cases}$ $\alpha=0{,}5,\ \beta=1{,}5$	6	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<1\\ \dfrac{x^3-x}{7} \quad \text{при } 1\le x<2\\ 1, \text{ при } x>2\end{cases}$ $\alpha=1,\ \beta=1{,}5$
7	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<2\\ \dfrac{x^2-x-2}{4} \quad \text{при } 2\le x<3\\ 1, \text{ при } x>3\end{cases}$ $\alpha=2,\ \beta=2{,}5$	8	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<1/3\\ \dfrac{(3x-1)^2}{25} \quad \text{при } 1/3\le x<2\\ 1, \text{ при } x>2\end{cases}$ $\alpha=1,\ \beta=1{,}5$
9	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<3\\ \dfrac{(x-3)^2}{4} \quad \text{при } 3\le x<5\\ 1, \text{ при } x>5\end{cases}$ $\alpha=3,\ \beta=4$	10	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<2\\ \dfrac{(x-2)^2}{16} \quad \text{при } 2\le x<6\\ 1, \text{ при } x>6\end{cases}$ $\alpha=4,\ \beta=5$

11	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<3\\ \dfrac{(x-3)^2}{25} \quad \text{при } 3\le x<8\\ 1, \text{ при } x>8\end{cases}$ $\alpha=4,\ \beta=7$	12	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<1\\ \dfrac{(x-1)^2}{9} \quad 4 \text{ при } 1\le x<4\\ 1, \text{ при } x>4\end{cases}$ $\alpha=1{,}5,\ \beta=3$
13	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<1\\ \dfrac{x^2-1}{3} \quad \text{при } 1\le x<2\\ 1, \text{ при } x>2\end{cases}$ $\alpha=1,\ \beta=1{,}5$	14	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0{,}5\\ \dfrac{(2x-1)^2}{9} \quad \text{при } 0{,}5\le x<2\\ 1, \text{ при } x>2\end{cases}$ $\alpha=1, \beta=1{,}5$
15	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<1\\ \dfrac{(x-1)^3}{8} \quad \text{при } 1\le x<3\\ 1, \text{ при } x>3\end{cases}$ $\alpha=2,\ \beta=2{,}5$	16	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0\\ \dfrac{x^3}{8} \quad \text{при } 0\le x<2\\ 1, \text{ при } x>2\end{cases}$ $\alpha=1,\ \beta=1{,}5$
17	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<2\\ \dfrac{(x^2-x-2)}{4} \quad \text{при } 2\le x<3\\ 1, \text{ при } x>3\end{cases}$ $\alpha=2,\ \beta=2{,}5$	18	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<2\\ \dfrac{(2x-4)^2}{16} \quad \text{при } 2\le x<4\\ 1, \text{ при } x>4\end{cases}$ $\alpha=2{,}5\ \ \beta=3$
19	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<1\\ \dfrac{4(x^2-1)}{21} \quad ,5 \text{ при } 1\le x<2{,}5\\ 1, \text{ при } x>2\end{cases}$ $\alpha=1{,}5,\ \beta=2$	20	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0\\ \dfrac{x^3-x^2}{4} \quad \text{при } 0\le x<2\\ 1, \text{ при } x>\pi/2\end{cases}$ $\alpha=1,\ \beta=1{,}5$
21	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<1\\ \dfrac{(x-1)^2}{9} \quad \text{при } 1\le x<4\\ 1, \text{ при } x>4\end{cases}$ $\alpha=1{,}5,\ \beta=3$	22	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<2\\ \dfrac{(x-2)^3}{8} \quad \text{при } 2\le x<4\\ 1, \text{ при } x>4\end{cases}$ $\alpha=2{,}5\ \ \beta=3$

23	$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ \dfrac{x^2}{25} & \text{при } 0\le x<5\\ 1, & \text{при } x>5\end{cases}$ $\alpha=2,\ \beta=3$	24	$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<2\\ \dfrac{(x-2)^2}{4} & \text{при } 2\le x<4\\ 1, & \text{при } x>4\end{cases}$ $\alpha=2,\ \beta=3$
25	$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<1\\ \dfrac{x^2-1}{8} & \text{при } 1\le x<3\\ 1, & \text{при } x>3\end{cases}$ $\alpha=2,\ \beta=3$	26	$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<2\\ (x-2)^2 & \text{при } 2\le x<3\\ 1, & \text{при } x>3\end{cases}$ $\alpha=2,\ \beta=3$
27	$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<2\\ \dfrac{x^2-4}{5} & \text{при } 2\le x<3\\ 1, & \text{при } x>2\end{cases}$ $\alpha=2{,}5,\ \beta=3$	28	$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<3\\ (x-3)^2 & \text{при } 3\le x<4\\ 1, & \text{при } x>4\end{cases}$ $\alpha=3.5,\ \beta=4$
29	$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0{,}5\\ \dfrac{(x-0.5)^2}{4} & \text{при } 0{,}5\le x<2{,}5\\ 1, & \text{при } x>2{,}5\end{cases}$ $\alpha=1,\ \beta=2$	30	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & 0<x\le\pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$ $\alpha=\pi/4,\qquad \beta=\pi/2.$

Приклад розв'язку завдання 2

Випадкова величина *x* задана інтегральною функцією розподілу *F(x)*.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{\textit{при}}\ \ x\le 0\\ \dfrac{4x^2}{49} & \text{\textit{при}}\ \ 0<x\le\dfrac{7}{2}\\ 1 & \text{\textit{при}}\ \ x>\dfrac{7}{2}\end{cases}$$

а) Знайдемо диференціальну функцію (щільність ймовірностей) розподілу:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & при \;\; x \le 0 \\ \dfrac{8x}{49} & при \;\; 0 < x \le \dfrac{7}{2}. \\ 0 & при \;\; x > \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

б) Обчислимо математичне очікування, дисперсію, середнє квадратичне відхилення:

$$M(X)=\int_a^b x\cdot f(x)dx=\int_0^{\frac{7}{2}} x\cdot\frac{8x}{49}dx=\frac{8}{49}\int_0^{\frac{7}{2}} x^2dx=\frac{8}{49}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{7}{2}}=\frac{8\cdot 49\cdot 7}{49\cdot 3\cdot 8}=7/3\approx 2{,}33.$$

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\frac{8}{49}\int_0^{\frac{7}{2}} x^3dx-(7/3)^2=\frac{8}{49}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^{\frac{7}{2}}-\frac{49}{9}=$$

$$=\frac{49}{8}-\frac{49}{9}=49/72\approx 0{,}681;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}681}=0{,}82.$$

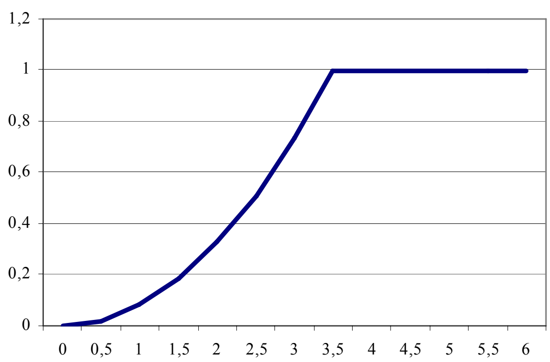

Рис. 2.1– Графік інтегральної функції F(X)

$f(x)$

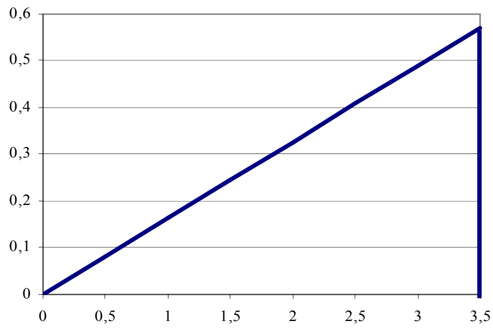

Рис. 2.2– Графік диференціальної функції $f(x)$.

Завдання 3

За вибіркою, що наведено у таблиці, необхідно згідно з варіантами:

а) знайти рівняння лінійної регресії та побудувати графіки точкової функції і регресійної прямої;

б) підрахувати коефіцієнти кореляції і детермінації;

в) оцінити значущість рівняння регресії, використовуючи критерій Фішера;

г) оцінити значущість коефіцієнтів рівняння регресії, використовуючи t-критерій Ст'юдента, і визначити довірчий інтервал для кожного коефіцієнта рівняння регресії.

Варіанти	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	12	18	19	12,5	1,1
1,5	8,2	17	18	9,7	1,6
2	6,5	16	16	7	2,2
2,5	4,8	15	13	6	3,2
3	3,6	12	9	5,5	4,1
3,5	2,8	8	4	4,8	5,5
4	2,1	4	-2	4,2	7,3
4,5	1,7	1	-9	3,5	10,5
5	1,6	-2	-14	3	14
5,5	1,3	-6	-19	2,5	16,1
Варіанти	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	11,5	13,2	2,2	11,7	19,3
2	7,7	10,4	2,7	7,4	18,8
3	6	7,7	3,3	6,1	17,4
4	4,3	6,7	4,3	4,2	13,6
5	3,1	6,2	5,2	3,5	9,1
6	2,3	5,5	6,6	2,5	4,3
7	1,6	4,9	8,4	1,7	1
8	1,2	4,2	11,6	1,2	-5
9	1,1	3,7	15,1	1,1	-13
10	0,8	3,2	17,2	0,8	-20

Продовження таблиці

Варіанти	11	12	13	14	15
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	10,2	10,9	1,3	-1,8	20
1,5	8	9	1,7	-1,3	19,5
2	6,6	7,7	2,3	-0,7	18,3
2,5	6	6,7	3,1	0,3	16,5
3	5,1	5,5	4	1,2	11
3,5	4,5	4,8	5,4	2,6	6
4	3,8	4,1	7,2	4,4	-1
4,5	3	3,6	10,4	7,6	-8
5	2,6	3,2	14,1	11,1	-14
5,5	2,2	3,1	16	13,2	-20
Варіанти	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	6	5,6	17,1	-6,9	11,8
2	3,9	6	13,3	-6,4	9,7
3	2,2	6,6	11,6	-5,8	8,3
4	0,5	7,4	9,9	-4,8	7,5
5	-0,7	8,3	8,7	-3,9	6,6
6	-1,5	9,7	7,9	-2,5	6
7	-2,2	11,5	7,2	-0,7	5,4
8	-2,6	14,7	6,8	2,5	4,6
9	-2,8	17,5	6,7	6	4,2
10	-3	20	6,4	8,1	4
Варіанти	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	16,4	5	8,4	15,2	5,4
1,5	15,4	5,5	4,1	12,4	1,6
2	14,4	6,1	2,8	9,7	-0,1
2,5	13,4	7,1	0,9	8,7	-1,8
3	10,4	8	0,2	8,2	-3
3,5	6,4	9,4	-0,8	7,5	-3,8
4	3	11,2	-1,6	6,9	-4,5
4,5	-2	14,4	-2,1	6,2	-4,9
5	-6,1	17,9	-2,2	5,7	-5
5,5	-10	20	-2,5	5,2	-5,3

Продовження таблиці

Варіанти	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	7,8	-4,3	11	4,7	18,1
2	5	-3,8	10	5,2	14,3
3	2,3	-3,2	9	5,8	12,6
4	1,3	-2,2	8	6,8	10,9
5	0,8	-1,3	5	7,7	9,7
6	0,1	0,1	1	9,1	8,9
7	-0,5	1,9	-2,4	10,9	8,2
8	-1,2	5,1	-7,4	14,1	7,8
9	-1,7	8,6	-11,5	17,6	7,7
10	-2,2	10,7	-15,4	19,7	7,4

Приклад розв’язку завдання 3

У таблиці 1 дана вибірка

Таблиця 1 – Вихідні дані

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	7,5	6,9	6,1	5,2	4,6	3,7	2,9	1,7	1,2	0,9

Побудуємо графік точкової функції:

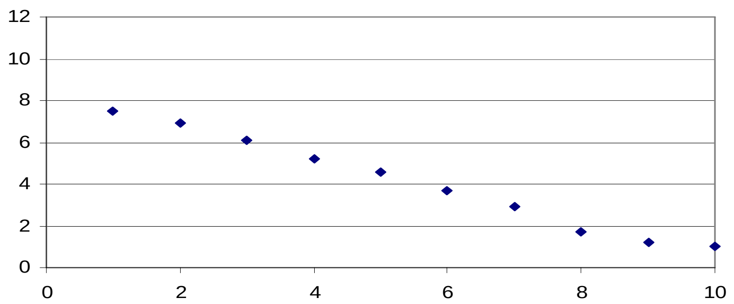

Рис. 3.1 Графік залежності y_i від x_i

За розташуванням точок є можливість передбачити наявність лінійної кореляційної або регресійної залежності. Будемо шукати рівняння регресії у виді:

$$\widehat{y} = a + bx$$

Для визначення коефіцієнтів використовуємо метод найменших квадратів, згідно з яким:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (a + bx_i - y_i)^2 \Rightarrow \min$$

Після нескладних перетворень отримаємо

$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

$$b = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \qquad (1)$$

где $\overline{x} = \sum x_i / n$, $\overline{y} = \sum y_i / n$. $\overline{xy} = \sum x_i y_i / n$. $\overline{x^2} = \sum x_i^2 / n$

Коефіцієнт b називається коефіцієнтом регресії. Вираз у чисельнику для b є коваріацією (кореляційний момент) величин У та Х, який характеризує ступінь розсіювання навколо середнього значення:

$$\operatorname{cov}(x, y) = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}$$

Складемо таблицю 2 та обчислимо вибіркові середні.

Таблиця 2 – Визначення вибіркових середніх значень

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	7,5	1,00	7,50
2	6,9	4,00	13,80
3	6,1	9,00	18,30
4	5,2	16,00	20,80
5	4,6	25,00	23,00
6	3,7	36,00	22,20
7	2,9	49,00	20,30
8	1,7	64,00	13,60
9	1,2	81,00	10,80
10	0,9	100,00	9,00
$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x^2}$	$\overline{xy}$
5,5	4,07	38,50	15,93

Обчислимо коефіцієнти за формулою (1):

$$b = (15.93 - 5.5 \cdot 4.07)/(38.5 - 5.5 \cdot 5.5) = -0.78242;$$
$$a = 4.07 - (-0,78242) \cdot 5.5 = 8,37333$$

Дисперсії змінних X та Y визначаються за формулами

$$\sigma_x{}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 / n$$
$$\sigma_y{}^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = \sum (y_i - \bar{y})^2 / n,$$

σ_x та σ_y називають середніми квадратичними відхиленнями.

Коефіцієнт кореляції визначається за формулою: $r = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$

При r>0 кореляційний зв'язок між змінними – прямий, при r<0 – зворотній.

Доповнимо таблицю двома стовпцями та обчислимо дисперсії.

Таблиця 3 – Остаточний варіант таблиці

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	7,5	1,00	7,50	20,25	11,76
2	6,9	4,00	13,80	12,25	8,01
3	6,1	9,00	18,30	6,25	4,12
4	5,2	16,00	20,80	2,25	1,28
5	4,6	25,00	23,00	0,25	0,28
6	3,7	36,00	22,20	0,25	0,14
7	2,9	49,00	20,30	2,25	1,37
8	1,7	64,00	13,60	6,25	5,62
9	1,2	81,00	10,80	12,25	8,24
10	0,9	100,00	9,00	20,25	10,05
$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\overline{x^2}$	$\overline{xy}$	σ_x^2	σ_y^2
5,5	4,07	38,50	15,93	8,25	5,09

Обчислимо коефіцієнт кореляції

$$r = \frac{(15,93 - 4,07 \cdot 5,5)}{\sqrt{8,25 \cdot 5,09}} = -0,9965$$

Після того, як знайдено рівняння лінійної регресії, проведемо оцінку значущості як рівняння в цілому, так і окремих його параметрів.

Коефіцієнт детермінації $R^2=r^2$.

Оцінка значущості рівняння регресії в цілому дається за допомогою F-критерію Фішера. При цьому висувається нульова гіпотеза H_o, що коефіцієнт регресії дорівнює нулю, тобто b = 0, і, отже, чинник х не робить впливу на результат *y*. Для цього порівнюють фактичне значення $F_{факт}$ та критичне (табличне) $F_{табл}$ значення F – критерію, при цьому $F_{факт}$ обчислюється за формулою $F_{факт} = \frac{r^2}{1-r^2}(n-2) \approx 1136$

Після обчислення цієї величини проводиться тест, який полягає в перевірці гіпотези H_o про статичну не значущість рівняння регресії. Рівень значущості α – це ймовірність відкинути правильну гіпотезу за умови, що вона вірна. Приймаємо α=0,05. Якщо $F_{табл}<F_{факт}$, то гіпотеза про випадкову природу оцінюваних характеристик відхиляється і признається статистична значущість і надійність рівняння регресії. Табличне значення вибирається із спеціальної таблиці з урахуванням того, що $к_1=1$ $к_2=n-2$.

Із таблиці визначимо $F_{табл}$ (при $к_1=1$, $к_2$ = 8, рівень значущості α=0,05). Значення $F_{табл}$ = 5,32. У нашому випадку $F_{табл}$ =5,32 < $F_{факт}$ = 1136,503.

Це означає, що гіпотеза H_o про випадкову природу оцінюваних характеристик відхиляється і признається значущість рівняння регресії.

Для оцінки статистичної значущості коефіцієнтів регресії і кореляції розраховуються t- критерій Ст'юдента та довірчі інтервали для кожного з показників. Висувається гіпотеза H_o про випадкову природу показників.

Випадкові помилки параметрів обчислюються за формулами:

$$t_a = \frac{a}{m_a} \qquad t_b = \frac{b}{m_b}$$

Якщо $t_{табл} < t_{факт}$, то H_o відхиляється,тобто *a, br* відрізняються від нуля і сформувалися під впливом діючого чинника х. Для розрахунку довірчого інтервалу визначаємо граничні помилки.

Тоді довірчі інтервали мають вид:

$$\Delta_a = t_{табл} m_a \qquad \Delta_b = t_{табл} m_b$$

Обчислення стандартних помилок – досить трудомісткий процес, тому для визначення $a - \Delta_a \le a \le a + \Delta_a \qquad b - \Delta_b \le b \le b + \Delta_b$ використовуємо вбудовану функцію Excel ЛИНЕЙН(). Для цього введемо таблицю 1 на робочому листі (починаючи з чарунку А1), а потім помітимо область чарунків А12:В16, для чого клацнемо по значку вибору функцій, виберемо категорію "Статистические" та знайдемо функцію ЛИНЕЙН(). З'явиться вікно, в якому необхідно вказати інтервал значень $y_i : x_i$. У полях "Конст" та "Статистика" введемо цифру 1. На рисунку 3.2 представлено заповнене вікно.

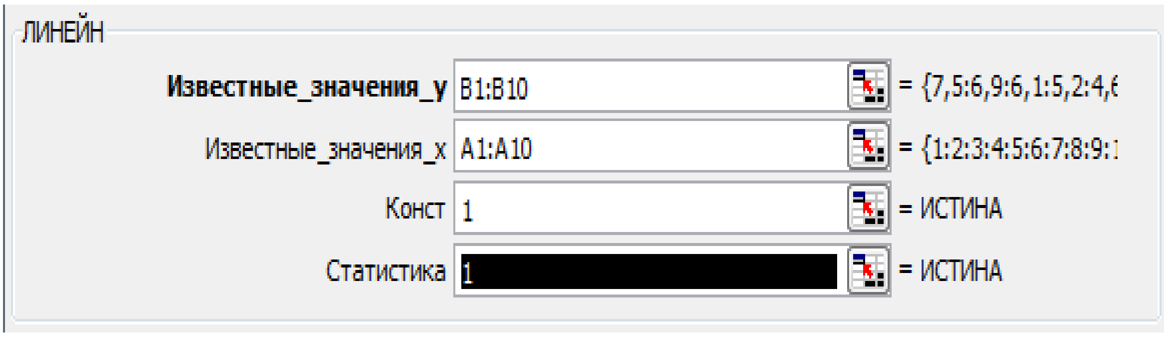

Рис 3.2 Введення аргументів функції ЛИНЕЙН()

Натиснемо ОК, потім клавішу F2, потім Enter при натиснутих одночасно Shift и CTRL. У поміченої області з'являться результати розрахунку (таблиця 4).

Таблиця 4 – Результати розрахунку

-0,78242	8,373333
0,023209	0,144008
0,99301	0,210807
1136,503	8
50,50548	0,355515

Проаналізуємо результати. У першому рядку таблиці отримані коефіцієнти b та a, тобто b= - 0,78242; a = 8,37333. У другому рядку таблиці підраховані стандартні помилки m_b =0,023209; m_a = 0,144008.

Коефіцієнт детермінації R^2 = 0,99301 вказано в третьому рядку, першого стовпця. $F_{факт}$ = 1136,503 (четвертий рядок, перший стовпець), число ступенів свободи дорівнює n-2=8 (четвертий рядок, другий стовпець).

Стандартна помилка Y дорівнює 0,210807 (третій рядок, другий стовпець). Нарешті, регресійна і залишкова суми квадратів представлена в нижньому рядку. Таким чином, рівняння парної регресії має вид:

$$\boldsymbol{y = 8{,}37733 - 0{,}78242\, x}$$

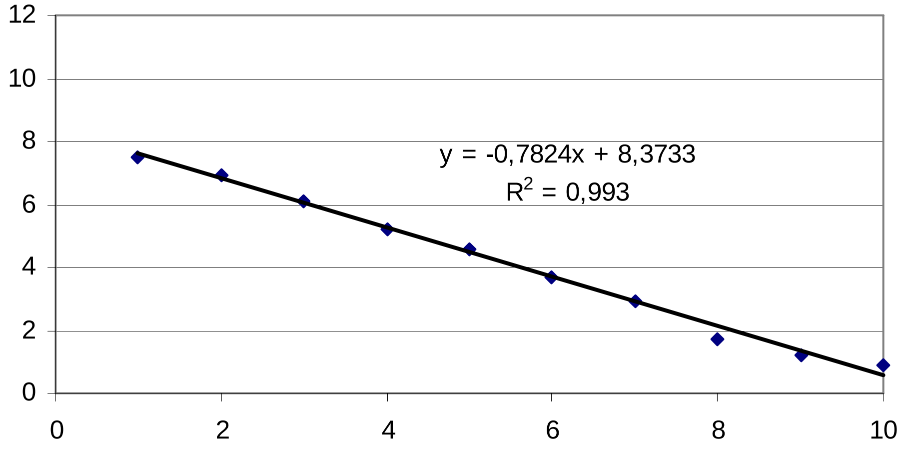

Рис. 3.3 – Графік регресійної прямої

Оцінимо якість рівняння регресії, значущість коефіцієнтів і визначимо довірчі інтервали.

$$t_b = -0{,}78242/0{,}023209 = -33{,}7\ ;\ \ t_a = 8{,}37333/0{,}144008 = 58{,}14$$

Табличне значення $t_{табл}$ = 2,306 (при рівні значущості α=0,05 та k=8). Табличне значення буде менше t_a , t_b, тому коефіцієнти рівняння регресії статистично значимі. Граничні помилки рівні:

$$\Delta_a = 2.306 * 0{,}144008 = 0{,}332 \qquad \Delta_b = 2.306 * 0{,}023209 = 0{,}0535$$

Отже, довірчі інтервали коефіцієнтів рівняння мають вид:

$$8{,}04 \le a \le 8{,}705 \quad -0{,}8359 \le b \le -0{,}7289$$

Навчальне видання

Завдання для самостійної роботи за темою

«ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ»

з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

з прикладами розв'язання типового варіанта

(для студентів 2 курсу денної форми навчання

за напрямом підготовки 6.080101 – «Геодезія, картографія та землеустрій»)

Укладачі **МОРДОВЦЕВ** Сергій Михайлович

ДАНИЛЕВСЬКИЙ Микола Прокопович

Відповідальний за випуск *А. І. Колосов*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *С. М. Мордовцев*

План 2013, поз. 116М

Підп. до друку 20.12.2013 Формат 60х84 /16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 0,6
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.